

ファジー内積空間について

Note on fuzzy inner product spaces

伊藤 益生
Masuo ITOH

1 はじめに

「ファジー理論 (fuzzy theory)」の fundamental concepts は, 今から 45 年ほど前に Zadeh[25] によって導入され, これが fuzzy 数学の骨格を成していることは承知の通りである. 論文発表以来, “曖昧 (fuzzy)” という概念を数学的に解析する手段としては標準的な手法として広く知られるようになり, 今ではすっかり定着した感がある.

本稿は, 工学への応用を意識し, ファジー理論の中では余りよく知られていない fuzzy inner product space (ファジー内積空間 = F.I.P.S. と略す) 研究の現状を紹介したものである. 筆者は, fuzzy point (ファジー点) と Q -relation (Q -関係) は fuzzy theory の研究をすすめる上で重要な役割を果たす概念であると認識し, 研究には積極的に利用するよう心掛けている. ところが, いずれの概念も, 残念ながら日本の fuzzy theory 研究者には極めて認知度の低い概念である. これを踏まえ, 以下の各節では fuzzy point や Q -relation の重要性などに言及し, その上で, それを用いた F.I.P.S. の研究を説明することにした.

2 fuzzy point と Q -relation

工学理論の研究手段を数学に求めるならば, それは主に解析学である. とすると, 一般位相理論 (general topology) 上の収束

理論 (例えば, Moore-Smith の理論, filter の理論など...) が必要になる. つまり, ファジー位相空間 (fuzzy topological space = F.T.S. と略す) の定式化が先ず求められるところである. これについては Chang[3] 及び Lowen[15] などの先行研究によって定式化がなされ, その後多くの研究が発表されている. さらに, 収束の理論をファジー位相空間上で扱うということになれば, 本質的な働きをするのが “point (点)” である. ところが fuzzy set theory が開発された当初は, 高々シングルトン (=singleton)¹ として “point” を導入するのが精々で [26], point の純粋な fuzzy 化はできなかった.² その為, F.T.S. の中でその局所的な性質とか収束の研究ができなかったのである. これを “fuzzy point (ファジー点)” という拡張された点の概念を導入することによって, 収束理論が F.T.S. でも定義可能であることを最初に示したのが Wong([23]) である. Wong は fuzzy point を用い通常の位相空間論で分かっている諸々の性質をファジー理論の中で証明したが³, Moore-Smith の収束理論まで扱うことは結局出来なかった.

¹ $\bar{\alpha}$ が singleton であるとは, $\bar{\alpha}(x) = 1(x = \alpha), = 0(x \neq \alpha)$ を満たすもので, 数のファジー化として導入された概念である. なお, $A(x)$ は, 点 $x \in X$ が集合 A に属す度合い (=帰属度) を表すものとする.

² 通常の point を特殊な場合として含むように定義するべきであるが, singleton はその意味で不十分であった.

³ local countability, separability, local compactness などの局所的な性質を証明した.

この点の経緯を少し詳しく述べておく。

まず, x_λ が fuzzy point であるとは

$$x_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda & (y = x) \\ 0 & (y \neq x) \end{cases}$$

が成り立つ fuzzy set のことである。初歩的だが重要な課題として“ λ の取り得る値”をどう定めるべきかということと, “fuzzy point x_λ が集合 A に属す”ということはどう定めるべきかという問題がある。自然な考え方としては, それぞれ

$$\lambda \text{ の値は } \dots 0 < \lambda \leq 1,$$

$$A \text{ に属すは } \dots A(x) \geq \lambda$$

ということになるが, 例えば一般集合論でよく知られている定理

$$x \in \bigcup_n A_n \Rightarrow \exists A_i \text{ s.t., } x \in A_i \dots (TH)$$

を上定義のもとで証明しようとする, ファジー集合の特殊性が災いして証明は途中で破綻してしまうことが分かっている [23]. Wong は, 通常の位相空間では標準的に成り立つ local compactness に関する “ある” 定理を fuzzy の場合で証明することを考えたが, それには (TH) が必要で, その為には, “ λ の値” と, “ A に属す” ことをそれぞれ $0 < \lambda < 1$, $A(x) > \lambda$ に変更しなくてはならないと考え, そのように変更したのである。結果として, (TH) は成り立ち, さらに “ある” 定理も成り立つことが証明されたのではあるが, 帰属度 λ の定義と集合に属すことの定義は不自然なものとなり, このことによって, 一般の位相空間で成り立つ多くの定理が F.T.S. では成り立たなくなってしまう。成り立たせる為には, 仮定を少し修正しなくてはならないことになってしまったのである。つまり病的な構造が入り込んでしまったのである。結局, このような病的な構造が災いして Moore-Smith の収束理論が上手く展開できなかったのだ

ある。

これを解決したのが Pao-Ming と Ying-Ming [18, 19] である。彼らは, **quasi coincident** という概念⁴を導入することによって, 不自然な部分を見事に解消したのである。ただし, “集合に属す” という概念を, “集合に重なる” と読み替えることを要請した。ここに, fuzzy point である x_λ が fuzzy set A に “重なる” とは

$$A(x) + \lambda > 1 \dots (DEF)$$

を満たすことであると定義される。この意味は, 点 x が A に属す度合い $A(x)$ と一点 x だけで定義された fuzzy set x_λ の x における帰属度 λ を加えたとき 1 を越えるということ, これは $A(x) > 0$ を保証するもので, 点 x が必ず A に属していることを意味することになるのである⁵。このことから, x_λ が A に属していることを (DEF) によって定義することの妥当性が生まれるのである。(DEF) を満たすとき, Pu Pao-Ming らは, これを $x_\lambda \tilde{\in} A$ で表すことにした。すると, (TH) は $0 < \lambda \leq 1$ のもとで次の定理 (THQ) の形で成り立つことが証明される。

$$x \tilde{\in} \bigcup_n A_n \Rightarrow \exists A_i \text{ s.t., } x \tilde{\in} A_i \dots (THQ)$$

これは “本来の定理の $\in$ を $\tilde{\in}$ に変えて成り立つ” というものである。

上記の例を始めとして, quasi-coincident という概念を利用することによって, 通常の位相空間で成り立つ多くの定理が F.T.S. の中で自然な形で成り立つことが確認されるのである (詳しくは [18, 19] を参照)。そこで, Pu Pao-Ming らはこれを **Q-relation** と表現し, これに fuzzy 理論の中で特別な

⁴ “概ね一致する” とか “重なる” と翻訳される概念である。

⁵ $0 \leq A(x) \leq 1$, $0 < \lambda \leq 1$ であり, $A(x) + \lambda > 1$ が成り立つことから, $A(x) > 1 - \lambda \geq 0$ となる。結局, $A(x) > 0 \Leftrightarrow$ “点 x の集合 A への帰属度は 0 より大きい” が導かれる。

地位を与えたのである⁶。

F.T.S. が定式化され fuzzy linear space が定式化されれば、fuzzy linear topological space の定式化は自然である。これは、Katsaras[13, 14] によって定式化され、それ以後は、重要な課題とされるノルム化可能性 (normability) などが研究されることになるのである [5]。

ここまでの流れに沿った研究手法が本稿の中心テーマではあるが、他の研究手法を否定するものではない。そこで次の節で、ファジーノルム空間を例としてその研究手法の主なものを述べ、それに続くファジー内積空間研究への道標を併せて与えることにする。

3 fuzzy normed space の定式化

ノルム空間とは vector x の集合 X とその長さに相当するノルム $\|x\|$ とが対になっている空間 $(X, \|\cdot\|)$ のことである。従って、ファジー化 (fuzzification) は、vector を fuzzy 化する場合と norm の値 $\|x\|$ を fuzzy 化する場合に大別される。前者は fuzzy vector space の研究であり、後者はノルムの値からなる fuzzy set の研究である。前者の代表的な研究には、Katsaras[13, 14] や Cong-xin & Jin-xuan[5] の研究があり、後者の代表的な研究には Felbin[9] や Biswas[2] などの研究がある。筆者の立場からは、Katsaras の研究を主に説明したいところであるが、決して Felbin の研究を無視するものではない。この節では、最初に Felbin の研究を説明し、しかる後に Katsaras の研究を説明しよう。

まず、Felbin[9] の研究は、ノルムの値が fuzzy number になる場合の研究である。こ

れは、レベル集合 (level set) の上端値、下端値を利用してノルムの性質を導き出すというものであり、区間解析の研究成果が援用され発展した分野である。工学への応用を考えた場合、norm の値は非負実数であるから、fuzzy number の理論はスッキリしていて量的な評価には最適である。

次に、Biswas[2] の研究は Rosenfeld[21] が group theory を fuzzy group theory に拡張した際用いた手法と同様で、fuzzy norm の取り得る値によって構成される fuzzy subset を用い定式化されるものである。手法は代数的であり、工学への応用となると、量的な評価には不向きであるという弱点を持つ。

最後に、Katsaras[13, 14] や Cong-xin と Jin-xuan[5] によって定式化された fuzzy normed space の詳細を見てみよう。両者の定式化には、fuzzy point や Q-relation を利用する cong-xin & Jin-xuan と利用しない Katsaras という違いこそあれ⁷、概ね研究の方向は同じである。従って、ここでは両者を区別して説明することなく、両者を織り交ぜながら説明することにしよう。

前提となる空間 X は実線形空間であるとし、その上で定義された fuzzy points 全てからなる空間を $\tilde{X}$ で表すことにする。

まず、Katsaras は fuzzy subset が fuzzy subspace, convex, balanced, absorbing になる条件を定式化し、さらに fuzzy seminorm になる為の条件を定め、Minkowski functional を用いノルムを定義するという方法に従った。これを具体的に述べると、

X 内の fuzzy subset μ が

⁶誤解の無い様に断っておくが、Q-relation を用いて回避するという方法は、幾つかある手段の一つに過ぎない。ただ、筆者は“Q-relation は一般集合論を特別な場合として含む概念である”という事実を重視しただけのことである。

⁷Katsaras らの手法は、Q-relation を利用しないものではあるが、利用しないからといって、議論が展開できないというものではないことをお断りしておきたい。Q-relation を用いなくても、“重なる”と同種の概念を導入することによって解決をはかることは可能で、最近の研究などは寧ろ Q-relation を利用しない収束理論が研究されていることは特筆すべきことである。

(1) **convex(凸)** であるとは, $r\mu + (1-r)\mu \subseteq \mu$ ($\forall r \in [0, 1]$) が成り立つこと.

(2) **balanced(平衡)** であるとは, $k\mu \subseteq \mu$ (for $|k| \leq 1$) が成り立つこと.

(3) **absolutely convex(絶対凸)** であるとは, convex で balanced になること.

(4) **absorbing(吸収的)** であるとは, $\sup\{\mu(kx) : k > 0\} = 1$ が成り立つこと. と定式化した. これらの概念を用い, X 内の μ が **fuzzy semi-norm** であるとは, absolutely convex で absorbing が成り立つことであると定め, さらに $\inf\{\mu(kt) : k > 0\} = 0$ が成り立つならば, μ は **fuzzy norm** であると定めた ([14] 参照).

以上の定義を fuzzy point の空間 $\tilde{X}$ 上で定式化することは可能である. この定式化に最初に成功したのが Cong-xin と Jin-xuan[5] である. 紙数の都合上全てを述べることはできないので, convex を例としてその定式化のプロセスを述べてみよう.

$$\mu : \text{convex}$$

$$\Leftrightarrow r\mu + (1-r)\mu \subseteq \mu (\forall r \in [0, 1])$$

これを帰属度関数の関係に直せば,

$$\mu(rx + (1-r)y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

$$(x, y \in X, \forall r \in [0, 1])$$

となる. さらに, これを fuzzy point で表現すれば,

$$x_\alpha, y_\beta \tilde{\in} \mu (\alpha \geq \beta) \Rightarrow rx_\alpha + (1-r)y_\beta \tilde{\in} \mu$$

$$(r \in [0, 1])$$

となる. 他の概念も同様の方法を用いることにより, fuzzy point を用いて定式化される.

以上で定式化された fuzzy norm と X との対 (X, μ) を **fuzzy normed space** と呼ぶことにし,

$$\|x\|_\mu(r) = \inf\{t > 0 : x_r \tilde{\in} t\mu\}$$

によって定義される $\|\cdot\|_\mu(\cdot)$ を **Minkowski functional of μ** と呼ぶことにしたのである⁸.

引き続き, Congxin & Ming[4] は

Minkowski functional である $\|\cdot\|_\mu(\cdot)$

は次の条件を満たすことを証明した.

(1) $\|x\|_\mu(r) = 0$ for some $r \in (0, 1] \Leftrightarrow x = \theta$;

(2) $\|kx\|_\mu(r) = |k|\|x\|_\mu(r)$, $k \in \mathbb{R}$;

(3) $\|x + y\|_\mu(r) \leq \|x\|_\mu(r) + \|y\|_\mu(r)$;

(4) $\|\cdot\|_\mu(\cdot)$ は r に関して non-increasing かつ left-continuous である.

また, 逆に $\|\cdot\|_\mu(r)$ が上の性質 (1) ~ (4) を満たすならば, 一意な fuzzy norm μ が

$$\mu = \cup\{x_{1-r} : \|x\|_\mu(r) < 1\}$$

によって定義されることを証明した. つまり, X と $\|\cdot\|_\mu(\cdot)$ によって fuzzy normed space が一意に決定されることが証明されたのである. 現在では fuzzy normed space を $(X, \|\cdot\|_\mu(\cdot))$ で表す習慣があるが, これは妥当であろう.

ところで, Katsaras と Congxin 等の定義ならびに Felbin 等の定義とはお互い密接な関係にあることが Congxin and Ming[4] の研究によって明らかになっている. この研究成果によって, fuzzy normed space に関する成果であれば, 三者のいずれが得た結果であれ, その結果はお互いに翻訳可能であることが保証されたことになる.

さらに, Jin-xuan 他 [10] は Congxin の定義したノルム空間から自然に定義される fuzzy bounded operator の空間 $\widetilde{BL}(X, Y)$ の構造を研究し, その空間が fuzzy normed space になることを証明し, さらには fuzzy Banach space になる為の必要・十分条件も与えた. このことは, ノルム空間上で定義される工学上の様々な手法はファジー空間

⁸ $\tilde{\in}$ を $\in$ に変更すれば, Katsaras の定義になることに注意されたい.

上に自然に拡張されることを保証したことにもなるのである。

次に、内積をノルムと同様な手法で定義することは可能かどうか、みてみよう。

4 F.I.P.S.(研究の現状)

内積とは、vector space を X とするとき、 $X \times X \rightarrow \mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C})$ によって定義される2変数関数のことである。この定義に依拠し、fuzzificationの方法は幾つか考えられている。空間 X 自体を fuzzy vector space と考える方法と、 $\mathbb{K}$ を fuzzy number と考える方法である。先ず後者の考え方を述べ、しかる後に前者の立場に立った研究の現状を述べることにする。

先ず、内積の値を fuzzy numbers と考える場合をまとめておく。この定式化の代表的な論文は Abyad & Hamouly の論文 [1] と Ramakrishnan の論文 [20] ならびに Punnoose & Kuriakose の論文 [17] がある。内積の値を fuzzificate する場合、ノルムは非負の fuzzy number が対象であるから、その取り扱いが容易であったが、内積の値は実数又は複素数であるから、fuzzy number の理論を考慮しても、その取扱いは簡単でない。その困難さをどのように回避するかという所が各研究者の工夫である。

Abyad & Hamouly[1] は X を unitary $M(I)$ -module を係数とするベクトル空間⁹とし、fuzzy inner product(ファジー内積) $(\cdot) : X \times X \rightarrow M(I)$ は次の条件を満たすものと定義した。

(A1) ファジー内積 $(\cdot)$ は双線形 (bilinear) である。

(A2) ファジー内積 $(\cdot)$ は対称 (symmetric) である。

(A3) $x \neq 0$ に対して $(x \cdot x) > \tilde{0}$ が成り立

つ。

このとき、 $(X, \cdot)$ をファジー内積空間と定義し、その上でコーシー・シュワルツの不等式や種々の定理を証明した。

これを工学で応用する場合、fuzzy normed space の場合と異なり $M(I)$ に値を持つという条件が障害となり、fuzzy normed space の場合のようにはいかない。

Ramakrishnan[20] の F.I.P.S. は、Abyad & Hamouly の内積空間と同種のものである。僅かな違いは fuzzy point 上で内積を定義したところと Schwartz の不等式を公理とした所である。

Punnoose & Kuriakose[17] の導入した内積空間は、fuzzy number を係数とする vector space 上のベクトル x, y に対して、内積 (x, y) の値も同じ fuzzy number に値を取るものとして定義した。その点は Abyad & Hamouly の定義と変わらないが、この内積も Ramakrishnan の内積と同じく Schwartz の不等式の成立を公理としたところである。

次に内積の取る値を fuzzy 化する点は Abyad & Hamouly などと同様であるが、その方法が少々異なる定式化がある。それは、内積の値からなる集合を fuzzy subspace と考える場合である。これを次に紹介しよう。

Biswas[2] や Congxin & Yujang[6] の考えた F.I.P.S. は、次のようなものである。 X を linear space over the field $\mathbb{K}$ とし、 ν を fuzzy field で $\nu(0) = \nu(1) = 1$ を満たすものとする。このとき、直積空間 $X \times X$ 上の fuzzy set μ が次を満たすとき、 μ を X 上の F.I.P.S. であると呼ぶ。

$\forall x, y, z \in X$ と $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

(B1) $\mu(x + z, y) \geq \mu(x, y) \wedge \mu(z, y)$,

(B2) $\mu(\lambda x, y) \geq \nu(\lambda) \wedge \mu(x, y)$,

(B3) $\mu(x, y) = \mu(\bar{y}, \bar{x})$

ここに、 $\bar{x}$ は x の共役 (conjugate) である。

この定義に従い、多くの定理が証明され

⁹ $M(I)$ の正確な定義は [1] を参照されたい。

ている [11, 12]. ところが, これらの結果は定性的な結果であり, 定量的な結果が得られないという弱点がある.

また, Congxin & Yujang[6] の定義した内積空間は, X 上の fuzzy set $A, B \in \mathcal{F}(X)$ に対して, ファジー内積を $(A, B) : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ によって定義し, その性質として

$A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ とするとき,

$$(E1) (A, B) = (B, A)$$

$$(E2) (\alpha A, B) = \alpha \wedge (A, B) \text{ for all } \alpha \in [0, 1]$$

$$(E3) (A \cup B, C) \geq (A, C) \vee (B, C)$$

$$(E4) (A, A) = 0 \Leftrightarrow A = \phi$$

を要請するものとして定式化されるものである. この F.I.P.S. は fuzzy set どのような内積を定義したもので, 明らかに通常の内積空間を特殊な場合として含む拡張された概念であるが, この定義は Biswas などの定義した F.I.P.S. と同種の定義である.

以上述べた通り, 内積の値を fuzzy 化して考える方法には障害となる要素が多く, 我々の目的である "工学への応用" という観点からは適用は困難であるといわざるを得ない.

最後に, 我々の立場である X 自体を fuzzy 化する方法を述べよう.

Congxin & Ronglu & Cho[7] は内積空間のファジー化を次のように定式化した.

X を実線形空間とし, $\tilde{X} = \{x_\lambda : x \in X, \lambda \in (0, 1]\}$ とする. このとき, 関数 $\|\cdot\|(\cdot) : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$ が **fuzzy norm(ファジー・ノルム)** であるとは,

$$(C1) \|x\|(\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(C2) \|kx\|(\lambda) = |k| \|x\|(\lambda) \ (\forall k \in \mathbb{R}),$$

$$(C3) \|x + y\|(\lambda) \leq \|x\|(\lambda) + \|y\|(\lambda),$$

$$(C4) 0 < \mu \leq \lambda \leq 1 \text{ ならば } \|x\|(\lambda) \leq \|x\|(\mu),$$

$$(C5) \forall x_\lambda \in \tilde{X} \text{ に対して } 0 < \lambda_n < \lambda \text{ が存}$$

在して, $\lim \|x\|(\lambda_n) = \|x\|(\lambda)$ が成り立つ. このとき, $(X, \|\cdot\|(\cdot))$ を **fuzzy normed space(ファジー・ノルム空間)** という.

また, このファジーノルム空間を踏まえて, 次のようなファジー実内積空間を定義した.

$$(D1) (x_\lambda, x_\lambda) \geq 0 \text{ かつ } (x_\lambda, x_\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$(D2) (kx_\lambda, y_\mu) = k(x_\lambda, y_\mu), k \in \mathbb{R};$$

$$(D3) (x_\lambda + y_\lambda, z_\mu) = (x_\lambda, z_\mu) + (y_\lambda, z_\mu);$$

$$(D4) (x_\lambda, y_\mu) = (y_\mu, x_\lambda);$$

$$(D5) (x_\lambda, y_\mu) \leq (x_\lambda, y_\nu) \text{ if } 0 < \nu \leq \mu \leq 1;$$

$$(D6) \text{ 任意の } x_\lambda, y_\mu \in \tilde{X} \text{ と } \epsilon > 0 \text{ に対して } 0 < \delta < \mu \text{ が存在して, } (x_\lambda, y_{\mu-\delta}) < (x_\lambda, y_\mu) + \epsilon$$

以上 (D1) ~ (D6) が成り立つ空間 $(X, (\cdot, \cdot))$ を **strong fuzzy inner product space(強ファジー内積空間)** と呼ぶことにした. この定義の利点は, fuzzy point を対象としていて収束が議論できること. Q-relation を用いて通常之位相空間で成り立つ多くの定理が自然な形で成り立つことである. さらに, 値は実数に取るのであるから量的な評価が可能であるという利点もある.

以上, 現在知られている種々の定義を可能な限り調べてみたが, 文中で述べた通り, 夫々の考え方には, 様々な利点を感じるが, 工学への応用という観点でふりいにかけてみると, 通常の内積空間との相似性とか, 数値の評価が可能であることなどを考慮して, Cong-Xin & Rouglu & Cho の立場を筆者は支持したいと考えている. なお, 位相からノルム空間までに筆者が依拠した定義は概ね以下の通りである. 参考のためここで述べておく.

・ファジー位相空間は Lowen [15] に従った.

・ファジー線形位相空間は Katsaras [13, 14] に従った.

・Q-relation などの概念は Pao-ming &

Ying-ming [18, 19] に従った.

・ファジー距離空間は Cong-xin & Ma-ming [4] に従った.

・ファジーノルム空間は Cong-xin & Jin-xnan [5] に従った.

・ファジー実内積空間は Cong-Xin & Rouglu & Cho [7] に従った.

5 今後の研究課題

通常の Hilbert space であれば, 直交性 (orthogonality) とか双対作用素 (dual operator) などは必ず考えたい概念である. その際, 複素数上の内積空間が最適である. ところが, 残念ながら, 現在知られている強ファジー内積空間は実内積空間である. これを踏まえ, 現在及び今後の研究の方向としては, 次のような課題が横たわっている.

- (1) ファジー内積空間を複素数体上で考えること, その為には [7] の条件 (D5) をどう変更するか.
- (2) その上で, [7] で証明されている定理の検証は可能か.
- (3) 工学への応用を睨んだとき, 連続 (有界) 作用素が必要である. 内積条件を用いた連続条件の再定義は通常の内積空間と同じように可能か.
- (4) 通常の Hilbert 空間で成り立つ様々な定理は成り立つか.

以上述べたことは現在継続研究している課題であるが, 今後は新たな結果が得られ次第, 逐次 fuzzy 関係の専門雑誌に発表する予定である.

なお, Yan & Fang[24] は fuzzy point を用いた新たな fuzzy normed space として L-fuzzy normed space を定義している. これは上で説明した Cong-xin などの考える fuzzy normed space を特殊な場合として含む理論であり, 最新の取り組みであ

る. 工学への応用を考えた場合, L-topology まで考える必要性は感じないが, 数学上は興味深い取り組みであると考えている. 筆者の現在及び今後の研究課題である.

6 後書き

ここで紹介した定義・定理に誤りは無いと信ずるが, 歴史的な見解などについては参考となる文献は特に無いので, 点と点を結んで線を引くような書き方をしたところがある. 従って, 筆者の誤解が入り込む余地があったことをここにお断りしておく.

(以上)

参考文献

- [1] A.M.E. Abyad and H.M.E. Hamouly, *Fuzzy inner product spaces*, Fuzzy Sets and Systems 44(1991)309-326.
- [2] R. Biswas, *Fuzzy Inner Product Spaces and Fuzzy Norm Functions*, Infom. Sci. 53(1991)185-190.
- [3] C.L. Chang, *Fuzzy topological space*, J. Math. Anal. Appl., 43(1968)182-189.
- [4] W. Cong-xin and M. Ming, *Fuzzy normes, probabilistic norms and fuzzy metrics*, Fuzzy Sets and Systems 12(1984)215-229.
- [5] W. Cong-xin and F. Jin-xuan, *Fuzzy generqation of Kolomogoroff's theorems*, J. of Harbin inst. of Technology, No.1, (1984)1-7(in Chinese)
- [6] W. Cong-xin and Z. Yujang, *The Generalized Fuzzy Inner Product Space*, J. Harbin Inst. Tech. 24(2)(1992)7-11(in Chinese).

- [7] W. Congxin, L. Ronglu and M.H. Cho, *Strong Fuzzy Inner Product Spaces*, J. Fuzzy Math. 2(3)(1994)463-468.
 - [8] W. Cong-xin and M. Ming, *On continuity of fuzzy linear operators*, Acta Math. Sci.(English Edition), 8 No.1, (1988)71-77.
 - [9] C. Felbin, *Finite dimensional fuzzy normed linear space*, Fuzzy Sets and Systems 48(1992)239-248.
 - [10] F. Jin-xuan and L. Jun-hua, *Fuzzy norm of a linear operator and space of fuzzy bounded linear operators*, J. of Fuzzy Math. vol. 7, 3(1999)755-764.
 - [11] J.K. Kohli and R. Kumar, *On fuzzy inner product spaces and fuzzy co-inner product spaces*, 53(1993)227-232.
 - [12] J.K. Kohli and R. Kumar, *Linear mapping, fuzzy linear spaces, fuzzy linear product spaces and fuzzy co-linear product spaces*, Bull. Cal. Math. Soc. 87(1995)237-246.
 - [13] A.K. Katsaras, *Fuzzy topological vector spaces I*, Fuzzy Sets and Systems, 6(1981)85-95.
 - [14] A.K. Katsaras, *Fuzzy topological vector spaces II*, Fuzzy Sets and Systems, 12(1984)143-154.
 - [15] R. Lowen, *Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness*, J. Math. Anal. Appl. 56(1976)621-633.
 - [16] S. Nanda, *Fuzzy fields and fuzzy linear spaces*, Fuzzy Sets and Systems 19(1986)89-94.
 - [17] B. Punnoose and S. Kuriakose, *Fuzzy Inner Product Space-A New Approach*, J.Fuzzy Math.14(2)(2006)273-282.
 - [18] P. Pao-ming and L. Ying-ming, *Fuzzy topology I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Points and Moore-Smith Convergence*, J.Math.Anal.Appl.76(1980)571-599.
 - [19] P. Pao-ming and L. Ying-ming, *Fuzzy topolog II. Product and Quotient Spaces*, J.Math.Anal.Appl.77(1980)20-37.
 - [20] T.V. Ramakrishnan, *Fuzzy semi-inner product of fuzzy points*, Fuzzy Sets and Systems 89(1997)249-256.
 - [21] A. Rosenfeld, *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl. 35(1971)512-517.
 - [22] 菅野道夫, 室伏俊明, *ファジー測度*, 日刊工業新聞社 (1993).
 - [23] C.K. Wong, *Fuzzy points and local properties of fuzzy topology*, J. Mat. Anal. Appl. 46(1974)316-328.
 - [24] C. Yan and J. Fang, *Generalization of Kolmogoroff's theorem to L-topological vector spaces*, Fuzzy Sets and Systems 125(2002)177-2002.
 - [25] L.A.Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. and Control 8(1965)338-353.
 - [26] L.A.Zadeh, *A fuzzy-set-theoretic interpolation of linguistic hedges*, ERL Memorandum M 335(1972).
- 小山工業高等専門学校 一般科
mitoh@oyama-ct.ac.jp.